ზუსტ მეცნიერებათადა განათლების ფაკულტეტი
მათემატიკის სამაგისტრო საგანმანათლებლო პროგრამა

სამაგისტრო ბილეთების თეორიული საკითხები

ტოპოლოგია

1. ტოპოლოგიურ სივრცეთა უწყვეტი ასახვები. თეორემა ასახვის უწყვეტობის ექვივალენტური განმარტებების შესახებ. ჰომეომორფიზმი. ტოპოლოგიური ტიპი.
2. სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანა იმ ოპერატორების მეშვეობით, რომელთაც გააჩნიათ ბირთვის და ჩაკეტვის ოპერატორების თვისებები.
3. სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანა ბაზისის და მიდამოთა სისტემის მახასიათბელი თვისებების მქონე ოჯახებით.
4. სიმრავლის საზღვარი და მისი თვისებები.სივრცის სიმკვრივე და თვისებები. მკვრივი ქვესივრციდან ჰაუსდორფის სივრცეში უწყვეტი ასახვის გაგრძელებების თვისება.
5. განცალების აქსიომები. $T_0, T_1, T_{2,}T_{3,}$ $T3\frac{1}{2}$ და T_4 სივრცეთა თვისებები.
6. სივრცეთა ნამრავლი და თვისებები. ასახვათა დეკარტული და დიაგონალური ნამრავლები და თვისებები.
7. კომპაქრტური სივრცეები და მათი თვისებები. ევკლიდური სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლეების დახასიათება.
8. კომპაქტიფიკაცია. სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაცია. ერთ წერტილიანი კომპაქტიფიკაცია.
9. ჰომოტოპიური ასახვები და მათი თვისებები. ჰომოტოპიის კატეგორია. ჰომოტოპიური ტიპი.
10. წერტილთა დამოუკიდებები სისტემა. სიმპლექსი, წახნაგი. სიმპლიციალური კომპლექსი და მისი ჰომოლოგიის ჯგუფი.
11. რეტრაქტები და ექსტენზორები. ბრაუერის თორემა. ბორსუკის თეორემა ჰომოტოპიის გავრცელების შესახებ.
12. თეორემა კატეგორიის ობიექტის გაფართოების არსებობის შესახებ.
13. სივრცის შეიპი. ფოქსის შეიპური თეორია.
14. შებრუნებული სისტემების კატეგორია და მისი ფაქტორ -კატეგორია. შეიპური ფუნქტორი.

ლიტერატურა:

1. ვ.ბალაძე. ტოპოლოგია, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ბათუმი. 2016.
2. R.Engelking. General Topology, Heldermann Verlag, Berlin. 1989.
3. K. Borsuk, Theory of Retracts, Polish Scientific Publishers, Warszawa (1967).
4. S-T.Hu. Theory of Retracts. Wayne State Univ. Press. Detroit. 1965
5. Eilenberg S. and N. Steenrod. Foundations of Algebraic Topology. Princeton Univ. Press, 1952.
6. E. H. Spanier, Algebraic Topology. 3rd Edition. 1981
7. Glen E.Bredon. Topology and Geometry, Spinger-Verlag New York. 1993.
8. S-T Hu, Homotopy Theory (German) . 1959

ალგებრა

1. ვთქვათ X არაცარიელი სიმრავლეა და $B_X = \{\alpha \mid \alpha \subseteq X \times X\}$. დაამტკიცეთ, რომ B_X ნახევარჯგუფია ბინარულ მიმართებათა გამრავლების $(\circ)$ ოპერაციის მიმართ.
2. ვთქვათ X არაცარიელი სიმრავლეა და $S_X = \{f \mid f : X \to X\}$. დაამტკიცეთ, რომ S_X ნახევარჯგუფია ასახვათა გამრავლების $(\cdot)$ ოპერაციის მიმართ.
3. აჩვენეთ, რომ $S_X -$ის ყველლა მუდმივ ასახვათა სიმრავლე $S_X -$ის ქვენახევარჯგუფია ($S_X -$ის f_a $(a \in X)$ ასახვას უწოდებენ მუდმივს თუ $f_a(x) = a$ ყოველი $x \in X -$სათვის).
4. დაამტკიცეთ, რომ უსასრულო რიგის ციკლური ნახევარჯგუფი, ნატურალურ რიცხვთა $\mathbf{N} = (N \setminus \{0\}, +)$ ნახევარჯგუფის იზომორფულია.
5. თუ $\mathbf{S}$ სასრული რიგის ციკლური ნახევარჯგუფია, მაშინ $\mathbf{G_a} = (G_a, \cdot)$ იქნება $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფის m რიგის ციკლური ქვეჯგუფი იზომორფული ნაშთთა კასების $\mathbf{Z_m}$ ჯგუფისა $m-$ის მოდულით.
6. დაამტკიცეთ, რომ თუ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია და ერთდროულად არსებობენ a ელემენტის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა სიმეტრიული ელემენტები, მაშინ ეს ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იქნებიან, ე.ი. იარსებებს ერთადერთი სიმეტრიული ელემენტი.
7. დაამტკიცეთ, რომ თუ S სიმრავლეზე განმარტებული ბინარული ალგებრული $(*)$ ოპერაცია ასოციაციურია და ერთდროულად არსებობენ a ელემენტის როგორც მარჯვენა, ისე მარცხენა სიმეტრიული ელემენტები, მაშინ ეს ელემენტები ერთმანეთის ტოლი იქნებიან, ე.ი. იარსებებს ერთადერთი სიმეტრიული ელემენტი.დაამტკიცეთ, რომ ყოველი კომუტაციური პერიოდული ნახევარჯგუფი ერთიდემპოტენტიან ნახევარჯგუფთა ნახევარმესერია.
8. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი S ნახევარჯგუფი $S^1 = S \cup \{1\}$ სიმრავლის ყველა გარდაქმნათა T_{S^1} ნახევარჯგუფის რომელიღაც ქვენახევარჯგუფის იზომორფულია.
9. ვთქვათ $\mathbf{S}_i$ $(i \in I)$ არიან $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ ნახევარჯგუფის ქვენახევარჯგუფთა რაღაც სისტემა და $H = \bigcap_{i \in I} S_i \neq \varnothing$. აჩვენეთ, რომ $\mathbf{H} = (H, \cdot)$ ნახევარჯგუფია.
10. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფი რომელიღაც X სიმრავლეზე თავისუფალი $\mathbf{F_X}$ ნახევარჯგუფის ჰომომორფული სახეა.
11. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ არის იდემპოტენტურ ელემენტთა კომუტაციური ნახევარჯგუფი და $a \le b$, მხოლოდ მაშინ, როცა $a \cdot b = a$ $(a, b \in S)$. მაშინ $\mathbf{S}$ ნახევარჯგუფი ქვედა ნახევარმესერს წარმოადგენს.
12. დაამტკიცეთ, რომ თუ M არის $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ ნახევარჯგუფის წარმომქმნელთა რაღაც სისტემა, მაშინ ყოველი $a \in S-$ელემენტისათვის M სიმრავლეში არსებობს სასრული რაოდენობის $m_1, m_2, ..., m_n$ ელემენტთა ისეთი სისტემა, რომ $a = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

ლიტერატურა

1. დიასამიძე ი. ალგებრა და რიცხვთა თეორია. ბათუმი, 2008.
2. ქემხაძე შ. ს. უმაღლესი ალგებრა. თბილისი, 1972.
3. Howie M. Fundamentals of Semigroup theory. New York 1995.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
5. Ляпин Е. С., Аизенштат А. Я., Лесохин М. М. Упражнения по теории групп. Москва, 1967.

მათემატიკური ანალიზი

1. ფუნქციის ზღვარი. ძირითადი თეორემებ ი ფუნქციის ზღვართა შესახებ;
2. ფუნქციის უწყვეტობა. ძირითადი თეორემები უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ
3. ფუნქციის დიფერენციალი, ძირითადი თეორემები დიფერენციალის შესახებ. თეორემები დიფერენცირებად ფუნქციათა შესახებ;
4. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი (ფერმას როლის, ლაგრანჟის და კოშის) თეორემები;
5. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ძირითადი თვისებები. ინტეგრების მეთოდები.
6. განსაზღვრული ინტეგრალი. დარბუს ჯამები. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები.
7. თეორემა პირველი რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის შესახებ.
8. პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. კოშისფორმულა. ბერნულის განტოლება.
9. კომპლექსურირიცხვები. მოქმედებებიკომპლექსურრიცხვებზედამათითვისებები. შეუღლებულიკომპლექსურირიცხვი.
10. კომპლექსურირიცხვისგეომეტრიულიდატრიგონომეტრიულიფორმა. მოდულიდაარგუმენტი. ფესვისამოღებაკომპლექსურირიცხვიდან. მუავრისფორმულა.
11. წრფივოპერატორთაგანსაზღვრადამაგალითები. წრფივოპერატორთაუწყვეტობადაშემოსაზღვრულობა, კავშირი მათ შორის; დაამტკიცეთ,რომ თუ A შემოსაზღვრული ოპერატორია, რომელიც მოქმედებს ნორმირებული სივრციდან ნორმირებულ სივრცეში, მაშინ $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
12. წრფივოპერატორთაჯამიდანამრავლი; შებრუნებული ოპერატორები; დაამტკიცეთ, რომ თუ A ოპერატორი წრფივია,მაშინ მისი შებრუნებული A^{-1} ოპერატორიც იქნება წრფივი ოპერატორი;
13. სიმრავლეთა სიმძლავრე,თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები. სიმძლავრეთა შედარება. შრედერ-ბერნშტეინის თეორემა.
14. სრული მეტრიკული სივრცეები.მაგალითები; მეტრიკული სივრცის გასრულება; ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ თეორემა ჩალაგებული ბირთვების შესახებ.
15. წრფივისივრცისცნება და მაგალითები; წრფივისივრცის ქვესივრცე.წრფივიფუნქციონალი. ამოზნექილისიმრავლეებიდაფუნქციონალები.ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ ჰანი-ბანახისთეორემა ფუნქციონალის გაგრძელების შესახებ.
16. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $a_1, a_2, ..., a_m$ და $b_1, b_2, ..., b_m$ დადებითი რიცხვებისათვის :

ა) $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i \le \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^q\right)^{1/q}$, სადაც $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ და p>1; (ჰელდერ-რისის უტოლობა)

ბ) $\left\{\sum\limits_{i=1}^{m} (a_i + b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \le \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$, $p \ge 1$ (მინკოვსკი-რისის უტოლობა)

ლიტერატურა

1. ვლ.ჭელიძე, ე.წითლანაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი,ტ.1, თბილისი, 1979
2. ვლ. ჭელიძე. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია. თბილისი, 1964.
3. გ.ხაჟალია. ჩვეულებრივიდიფერენციალურიგანტოლებები. თბილისი, 1961.
4. გ. ონიანი. ნამდვილიანალიზისსაფუძვლები. ქუთაისი, 2010.
5. А. Н.Колмогоров , С. В. Фомин. Элементы теорий функций и фунлционального анализа. Москва, Наука, 1976 .
6. И.И. Привалов. Введение в теорию функций комплексного переменного. «Наука», 1984.
7. В. А. Петров, Н. Я. Виленкин, М. И. Граев. Элементы фунлционального анализа в задачах. Москва, Просвещение, 1978.